Über die Zusammensetzung algebraischer Zahlkörper.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

Herrn Prof. Dr. Leopold Fejér zum 60. Geburtstag am 9. Februar 1940 gewidmet.

Es seien $K_1(k)$ und $K_2(k)$ algebraische Zahlkörper über k. Das Primideal $\mathfrak{P}$ des zusammengesetzten Körpers $K_1K_2(k)$ sei ein Teiler von $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{p}$, welche Primideale der Körper $K_1(k)$ bzw. $K_2(k)$ bzw. k sind; dieselben sind eindeutig bestimmt. Es sollen die Relationen

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1^{g_1}\ldots,\quad \mathfrak{p}=\mathfrak{P}_2^{g_2}\ldots,\quad \mathfrak{P}_2=\mathfrak{P}^{g}\ldots$$

gelten, daher sind g_1, g_2 und $G=gg_2$ die Ordnungen der Primideale $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}$ in $K_1(k)$ bzw. $K_2(k)$ bzw. $K_1K_2(k)$; die Grade der Primideale sollen durch f_1 bzw. f_2 bzw. $F=ff_2$ bezeichnet werden, f bedeutet also den Grad und g die Ordnung von $\mathfrak{P}$ über den Körper $K_2(k)$. Die rationale Primzahl p sei durch $\mathfrak{p}$ teilbar, ferner seien

$$(1)\qquad \begin{gathered} g_i=p^{m_i}g_i^{(0)},\ g=p^m g^{(0)},\ G=p^M G^{(0)}=p^{m+m_2}G^{(0)},\ G^{(0)}=g^{(0)}g_2^{(0)},\\ (g_i^{(0)},p)=(g^{(0)},p)=(G^{(0)},p)=1\qquad (i=1,2). \end{gathered}$$

Wir werden in dieser Arbeit Sätze über die Zahlen F, G, $G^{(0)}$ beweisen, welche die Resultate von MIKAO MORIYA[1]) als spezielle Fälle enthalten. Unsere Verhandlungen stehen noch mit einer wichtigen Abhandlung von ÖYSTEIN ORE[2]) in gewissem Zusammenhange.

---

[1]) MIKAO MORIYA, Über einen Satz von Herbrand, *Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University*, **4** (1936), S. 182—194.

[2]) ÖYSTEIN ORE, Über zusammengesetzte algebraische Körper, *Acta Math.*, **49** (1926), S. 379—396.

1. Wir erweitern den zusammengesetzten Körper $K_1 K_2(k)$ zu einem Galoisschen Körper $G(K_1 K_2(k))$, dessen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist und in welchem das Primideal $\mathfrak{P}^*$ ein Teiler von $\mathfrak{P}$ ist. Es sollen die Körper $K_1(k)$ bzw. $K_2(k)$ zu den Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ gehören. Das Primideal $\mathfrak{P}^*$ besitze $\mathfrak{Z}$ bzw. $\mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{V}$ als Zerlegungsgruppe bzw. Trägheitsgruppe bzw. Verzweigungsgruppe. Die früher genannten Zahlen ergeben sich als Indexe gewisser Untergruppen. Aus der Theorie des Galoisschen Körpers folgen die Beziehungen[3])

$$
(2)\qquad
\begin{gathered}
\left.\begin{aligned}
p^{m_i} &= (\mathfrak{V} : \mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_i)\\
g_i &= (\mathfrak{T} : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_i)\\
f_i g_i &= (\mathfrak{Z} : \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_i)
\end{aligned}\right\}\ (i=1,\,2),\\
\begin{aligned}
p^m &= (\mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2), & p^M &= (\mathfrak{V} : \mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2),\\
g &= (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2), & G &= (\mathfrak{T} : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2),\\
fg &= (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2), & FG &= (\mathfrak{Z} : \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2).
\end{aligned}
\end{gathered}
$$

Vorerst werden wir zeigen, daß

$$
(3)\qquad m \leqq m_1, \qquad g \leqq g_1
$$

ausfallen; ist z. B. $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, dann wird sogar

$$
(3^*)\qquad g_1 \equiv 0 \pmod{g}.
$$

Betrachten wir die Komplexe

$$
(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1)(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_2) \text{ bzw. } (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2).
$$

Die Sätze von Frobenius ergeben

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{V} : \mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1) &\geqq (\mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2),\\
(\mathfrak{T} : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1) &\geqq (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2 : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2),
\end{aligned}
$$

daher ist (3) richtig. Wenn $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper ist, wird $\mathfrak{G}_1$ eine invariante Untergruppe, somit ist $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{T}$, der Komplex $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)$ bildet eine Gruppe und so folgt (3*).

Werden noch die Bezeichnungen

$$
(4)\qquad (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_i : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2) = a_i, \quad (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_i : \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2) = h_i,
$$
$$
a_2 = g, \; h_2 = fg \qquad (i = 1,\, 2)
$$

---

[3]) Bei unseren Rechnungen ist es zweckmäßig die oft angewendeten Symbole einzuführen: $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ bezeichne den Durchschnitt der Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; enthält die Gruppe $\mathfrak{H}$ die Untergruppe $\mathfrak{K}$, so bedeute $(\mathfrak{H} : \mathfrak{K})$ den Index von $\mathfrak{K}$ bezüglich $\mathfrak{H}$.

eingeführt, dann bekommt man die wichtigen Zusammenhänge:

$$G = g_i a_i,\ F = f_i \frac{h_i}{a_i} \quad (i = 1, 2;\ a_i,\ \frac{h_i}{a_i} \text{ rational ganz}). \tag{5}$$

Es seien noch x bzw. y bzw. z die Ordnungen der Gruppen $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2)$ bzw. $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2)$ bzw. $(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2)$. Die Zahl x ist durch y, die Zahl y durch z teilbar.

2. Wir werden die folgenden Sätze beweisen.

I. *Es gelten die Relationen:*

$$\begin{aligned} G &= \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)} t,\ t \leq (g_1, g_2), && t \text{ rational ganz,} \\ F &= \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} U,\ U \leq \frac{(g_1, g_2)}{t}, && U \text{ rational ganz.} \end{aligned} \tag{6}$$

I*. *Ist z. B. der Körper $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, dann wird:*

$$G = \frac{g_1 g_2}{\Delta},\ F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} \Delta', \tag{6*}$$

wo Δ' ein Teiler von Δ, ferner Δ ein Teiler von (g_1, g_2) ist.

Die Formel von G folgt aus (3), (3*) und (5).

Betrachten wir die Komplexe $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T}$ bzw. $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$. Da $\mathfrak{T}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{Z}$ bildet, sind diese Komplexe Gruppen. Ist noch $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, so ist der Komplex

$$(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T} \cdot (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$$

eine Gruppe, weil $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{Z}$ bildet. Aus demselben Grunde wird der Komplex $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1) \cdot (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)$ auch eine Gruppe. Die Ordnung der Gruppe $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_i)\mathfrak{T}$ ist gleich

$$\text{Ordnung von } (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_i) \text{ mal } (\mathfrak{T} : \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_i) = h_i x g_i \quad (i = 1, 2).$$

Bestimmen wir die Ordnung d des Durchschnitts von $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T}$ und $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$. Da der Durchschnitt die Gruppe $\mathfrak{T}$ enthält, so wird

$$d = Gyu, \qquad u \text{ rational ganz.} \tag{7}$$

Es ist daher

$$d = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)} tyu; \tag{8}$$

wenn z. B. $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper ist, bekommt man

$$d = \frac{g_1 g_2}{\Delta} yu. \tag{8*}$$

Andererseits enthält der Komplex $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T} . (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$ den Komplex $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1) . (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)$, woraus

$$\frac{h_1 x g_1 h_2 x g_2}{d} = h_1 x h_2 v, \quad v \text{ rational, nicht notwendig ganz, } v \geqq 1$$

und

$$\frac{g_1 g_2}{d} = \frac{v}{x}, \quad v \geqq 1, \quad v \text{ rational} \tag{9}$$

ausfallen. Wenn $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper ist, wird

$$\frac{g_1 g_2}{d} = \frac{v}{x}, \qquad v \text{ rational ganz.} \tag{9*}$$

Man bekommt

$$\frac{g_1 g_2 (g_1, g_2)}{g_1 g_2 t y u} = \frac{v}{x}, \quad \frac{y t u v}{x} = (g_1, g_2), \tag{10}$$

bzw.

$$\frac{g_1 g_2 \Delta}{g_1 g_2 y u} = \frac{v}{x}, \quad \frac{y u v}{x} = \Delta. \tag{10*}$$

Die Gruppen

$$\frac{(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}, \quad \frac{(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$$

sind solche Untergruppen der zyklischen Gruppe $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{T}}$, deren Durchschnitt die Ordnung u besitzt. Da die fraglichen Untergruppen ihrerseits die Ordnungen

$$\frac{h_1 x g_1}{G y} = \frac{h_1}{a_1} \frac{x}{y} \text{ bzw. } \frac{h_2 x g_2}{G y} = \frac{h_2}{a_2} \frac{x}{y}$$

besitzen, folgen

$$\left(\frac{h_1 x}{a_1 y}, \frac{h_2 x}{a_2 y}\right) = u, \quad u = \frac{x}{y} U, \quad U \text{ rational ganz,}$$

$$\left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = U, \quad U = \frac{y}{x} u. \tag{11}$$

Daraus ergibt sich bekannterweise

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} U.$$

Es wird noch nach (10)

$$U v = \frac{(g_1, g_2)}{t}, \quad U \leqq \frac{(g_1, g_2)}{t},$$

bzw. nach (10*)

$$Uv = \Delta, \quad U = \Delta', \quad \Delta' \text{ ein Teiler von } \Delta, \quad \text{QU. E. D.}$$

3. Wir werden folgende Sätze beweisen.

II. *Es gilt die Formel:*

(12) $G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})} r$, r **rational ganz,** $(r, p) = 1$, $r \leqq p^{m_1+m_2-M}$.

II*. *Ist z. B. $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, dann ist:*

(12*) $$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}.$$

Bilden wir die Komplexe $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{V}$ bzw. $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{V}$. Beide sind Gruppen, weil $\mathfrak{V}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{T}$ bildet; ihre Ordnungen sind

$$\frac{a_1 y p^M z}{p^{M-m_1} z} = a_1 y p^{m_1} \text{ bzw. } \frac{a_2 y p^M z}{p^{M-m_2} z} = a_2 y p^{m_2}.$$

Ist $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, dann bilden die Komplexe

$$(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{V} \,.\, (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{V}, \quad (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1) \,.\, (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)$$

Gruppen, weil $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{T}$ ist. Bestimmen wir die Ordnung d des Durchschnitts von $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{V}$ und $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{V}$ Der Durchschnitt enthält $\mathfrak{V}$, es ist daher

(13) $$d = p^M z u, \quad u \text{ rational ganz.}$$

Andererseits enthält der größere Komplex den Komplex $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1) \,.\, (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)$, es wird daher

$$\frac{a_1 y p^{m_1} a_2 y p^{m_2}}{d} = a_1 a_2 y v, \quad v \geqq 1, \quad v \text{ rational, nicht notwendig ganz.}$$

Daraus folgen

(14) $$\frac{p^{m_1+m_2}}{d} y = v, \quad v \geqq 1, \quad v \text{ rational}$$

bzw., wenn $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper ist,

(14*) $$\frac{p^{m_1+m_2}}{d} y = v, \quad v \text{ rational ganz.}$$

Man bekommt

(15) $$\frac{p^{m_1+m_2} y}{p^M z u} = v, \quad uv = \frac{y}{z} p^{m_1+m_2-M}, \quad v \geqq 1, \quad v \text{ rational}$$

bzw., wenn $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper ist,

(15*) $$uv = \frac{y}{z} p^{m_1+m_2-M}, \quad v \text{ rational ganz.}$$

Die Gruppen

$$\frac{(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}}, \quad \frac{(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}}$$

sind solche Untergruppen der zyklischen Gruppe $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{V}}$, deren Durchschnitt die Ordnung u besitzt. Es ist daher

$$\left(\frac{a_1 y p^{m_1}}{p^M z}, \frac{a_2 y p^{m_2}}{p^M z}\right) = u, \quad u = \frac{y}{z} r, \quad r \text{ rational ganz,}$$

weil

$$G = g_i a_i, \quad a_i = p^{M-m_i} a_i', \quad (a_i', p) = 1, \quad G^{(0)} = g_i^{(0)} a_i' \quad (i = 1, 2)$$

ausfallen. Es sind noch

(16) $$(a_1', a_2') = r$$

und

(17) $$r v = p^{m_1+m_2-M}, \quad v \geqq 1, \quad v \text{ rational.}$$

Ist $K_1(k)$ ein relativ Galoisscher Körper, so wird v rational ganz und

(17*) $$r = 1.$$

Daraus ergeben sich bekannterweise die Sätze II und II*.

(Eingegangen am 27. Oktober 1939)